



TITLE:

# 反応拡散系の2次元定常パターン (応用科学における偏微分方程式と 数値解析)

AUTHOR(S):

伊藤, 正幸

---

CITATION:

伊藤, 正幸. 反応拡散系の2次元定常パターン (応用科学における偏微分方程式と数値解析). 数理解析研究所講究録 1982, 462: 1-23

ISSUE DATE:

1982-06

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/103154>

RIGHT:

## 反応拡散系の2次元定常パターン

広島 大 理 伊藤正幸

1.1. 序 自然界の様々な現象を支配する系の数理解モデルとして、反応拡散系

$$(1.1) \begin{cases} p_t = d_1 \Delta p + P(p, q) \\ q_t = d_2 \Delta q + Q(p, q) \end{cases}$$

が、化学反応論、形態形成論、生態学等諸分野で提唱され、研究されてきた。一例を生態学にと、考えてみよう。ある領域  $\Omega$  (池, 島等) に閉じ込められた二種の生物が餌と捕食者の関係にあるとし、それぞれの位置  $x$ , 時刻  $t$  での人口密度を  $p(x, t)$ ,  $q(x, t)$  で表わすことにする。  $\Omega$  が常に一様な環境に保たれているとすると、餌の自然増殖率  $P_0$  は  $p$  のみの関数  $P_0(p)$ , また捕食者の自然死亡率  $Q_0$  は  $q$  のみの関数  $Q_0(q)$  である。また餌-捕食者の関係による餌の増殖率の減少は  $q$  に比例し、捕食者の増殖率の増加は  $p$  に比例すると考えると、餌, 捕食者の増殖率はそれぞれ  $P_0(p) - C_1 q$ ,  $-Q_0(q) + C_2 p$  ( $C_1, C_2 > 0$  定数) となる。さらに各種が  $\Omega$  内を動きまわる

様子を総体として拡散と考えると,  $p, q$  を支配する系は  $\Omega$  内で, (1.1) と表わされる。 $(d_1, d_2 > 0)$  は各種の拡散係数。

ただし

$$(1.2) \quad \begin{cases} P(p, q) = \{P_0(p) - c_1 q\} p \\ Q(p, q) = -\{Q_0(q) - c_2 p\} q \end{cases}$$

なお, 各種が  $\Omega$  内に閉じ込められていることは, 境界条件

$$(1.3) \quad \frac{\partial p}{\partial N} = \frac{\partial q}{\partial N} = 0 \quad \text{on } \Sigma = \partial\Omega$$

によつて表わされる ( $N$  は  $\Sigma$  の単位外法線ベクトル)。

$P, Q$  が図 1. 2, 3 の場合を考えてみよう。

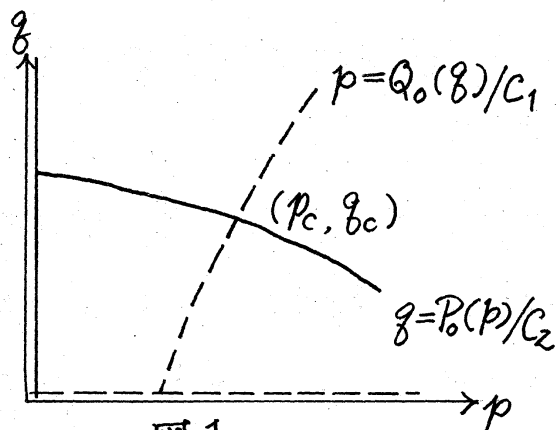


図 1

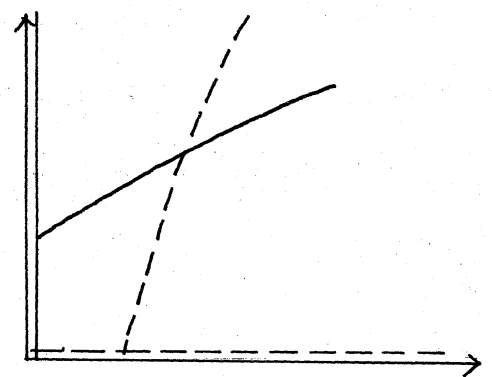


図 2

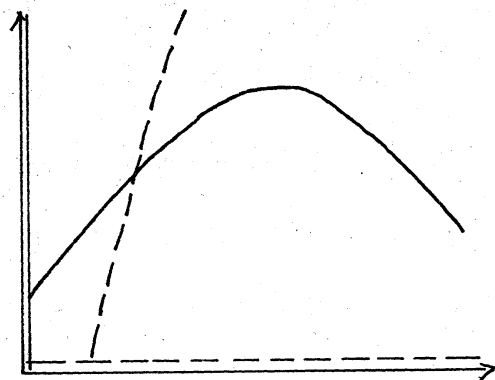


図 3

—  $P(p, q) = 0$   
 ---  $Q(p, q) = 0$

図1の場合は、兩種とも密度の増加が自種にとって環境の悪化をもたらすと考えたもので、 $P_0(p)$ は単調減少、 $Q_0(q)$ は単調増加である。 $(p_c, q_c)$ は $P(p_c, q_c) = Q(p_c, q_c) = 0$ の点であり、これは $(1, 1)$ ,  $(1, 3)$ の定数定常状態となっている。任意の正の初期状態 $(p(x, 0), q(x, 0))$ に対応する $(1, 1)$ ,  $(1, 3)$ の解は漸近的に $(p_c, q_c)$ に収束することが知られている(Mimura[1])。

図2の場合は、 $p$ の増加が交配の可能性を増し、結果として、 $P_0(p)$ の増加を招来すると考えたものである。この場合、たとえ $(p_c, q_c)$ が反乱方程式として安定でも、 $d_1$ がある $d_c > 0$ より小さくなると( $d_1 \approx d_c$ )、反乱拡散系としては、不安定となり、小振幅の空間的非一様定常解が出現することが知られている。(Segel & Jackson [2], Segel & Levin [3], Mimura, Nishiura & Yamaguchi [4])。

図3の場合は、 $p$ が希薄では生殖機会の減少を、 $p$ の過剰の増加は環境の悪化を、 $p$ 種自身に手ぬくと考えたものである(Allee効果)。この場合も $(p_c, q_c)$ の近傍では、図2と同じ状態であるため、 $d_c$ の近くの $d_1$ ではやはり小振幅非一様定常解が出現する。さらに $d_1$ が十分小さい場合には、計算機によって $(1, 1)$ ,  $(1, 3)$ を解き、次の図が得られている(Mimura, Nishiura & Yamaguchi)。これは $\sigma$ が十分大で落ちついているので、定常解と想像される。

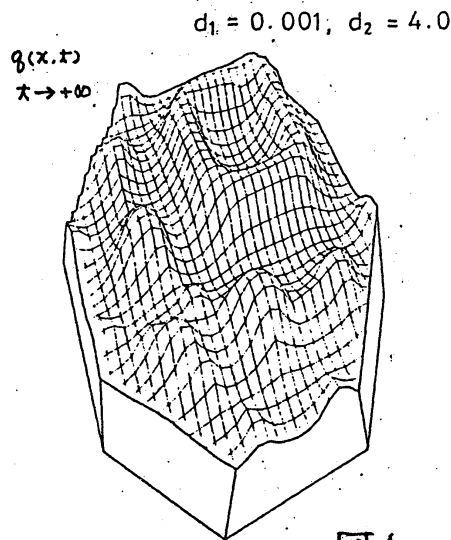


図4

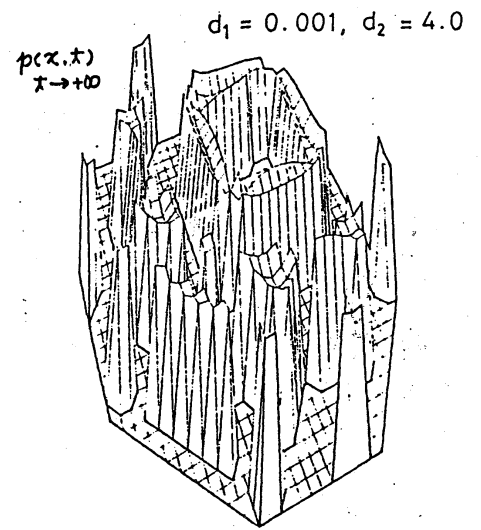


図5

このような解は解析的にとらえられるのであろうか。  
この定常解は、極めて振幅が大きく、 $\phi, g$ の山(谷)の位置は  
ほぼ一致しているが、 $\phi$ は $g$ に較べ大変急峻である。分岐理  
論が数学的正当性を発揮するのは、主に $d_2$ の近くで、解は  
小振幅かつなだらかな場合であり、上図の解の解析では、直接  
には適用不能と思われる。

我々の研究の原点は;

問題0 上図のような、大振幅かつ $\phi$ は急峻な定常解は  
存在しうるか?

実は空間次元1 ( $\Omega = (0, a)$ ) の場合は、既に、Fife [5]  
Mimura, Tabata & Hosono [6]等によって示されている。  
我々は $\Omega$ が2次元肩界領域の場合に彼らの方法を拡張して

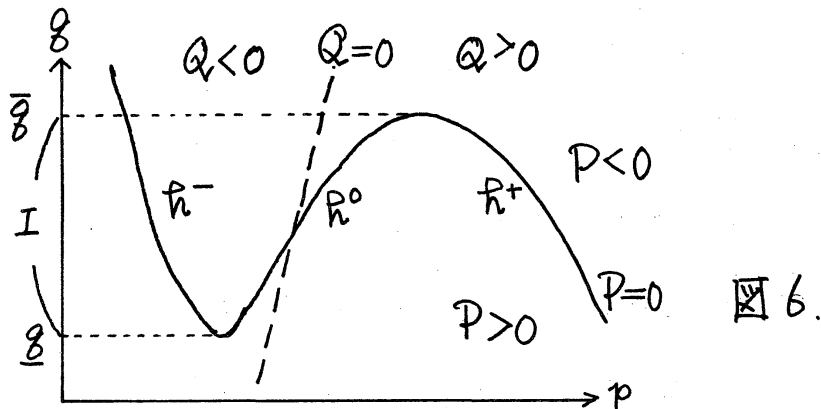
問題0の肯定的解答を得たい。そのためやや冗長になるが、  
彼らの方法を復習しておこう。

方程式は、適当な規格により ( $\varepsilon \ll 1$  とし) )

$$\begin{aligned} (1.4) \quad & \varepsilon^2 \frac{d^2 p}{dx^2} + P(p, q) = 0 \\ (1.5) \quad & \frac{d^2 q}{dx^2} + Q(p, q) = 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (1.4) \\ (1.5) \end{aligned}} \right\} 0 < x < a$$

$$(1.6) \quad \frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dx} = 0 \quad \text{at } x=0, a$$

また、非線形項  $P, Q$  は、上では特別な形 (1.2) を考えたが、  
彼らに共通している特徴は、 $P=0$  が  $pq$  平面で S 字形曲線と  
なっていることである。ここでは下図6の状態を仮定する。



解法の手順 (1次元)

才1段  $\varepsilon \ll 1$  ので、発見的に  $\varepsilon=0$  とおく

1) (1.4) は  $P(p, q)=0$ 。そこでもし、これが  $p=h(q)$   
ととけると、(1.5) に代入して、

$$(1.7) \quad d^2 q / dx^2 + Q(h(q), q) = 0$$

となり, 単一方程式に帰着されるが, 図6からわかるように  $q$  の区間  $I = (q_-, q_+)$  では,  $h$  は三価となっている。それぞれの枝を図6のように  $h^-$ ,  $h_0$ ,  $h^+$  と呼ぶことにする。彼等は, 予断をもって,

$$h(q) = h_{q^*}(q) = \begin{cases} h^+(q) & q > q^* \\ h^-(q) & q < q^* \end{cases}$$

( $q^* \in I$ ) とし,  $Q(h(q), q)$  は下図のような不連続関数であり, 各枝  $Q(h^\pm(q), q)$  は単調減少である。

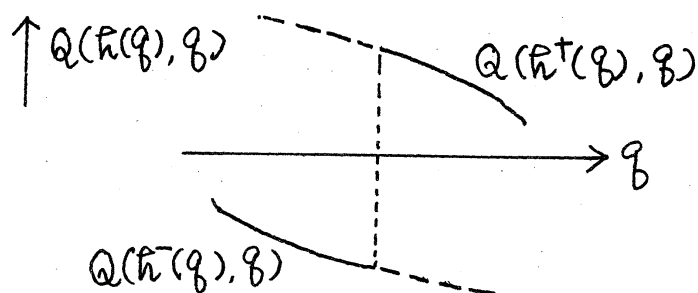
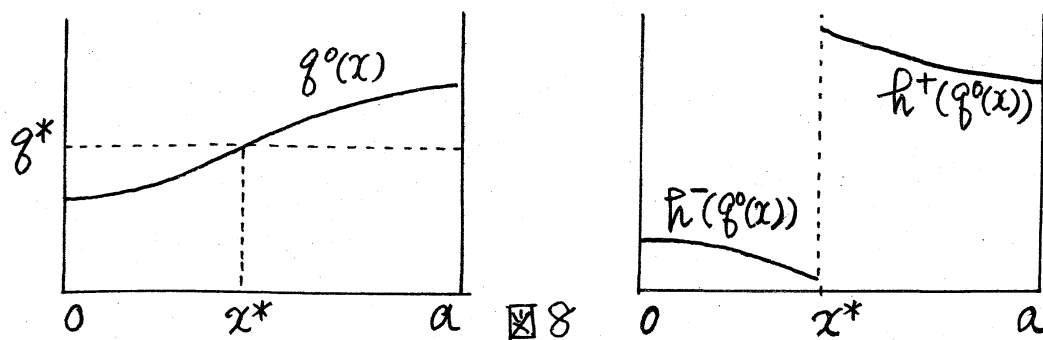


図7

$$\left( \frac{d}{dq} Q(h^\pm(q), q) \leq 0 \right).$$

(1.7) 及び "Neumann条件  $\partial \phi / \partial n = 0$  at  $x=0, a$  [これを reduced problem と呼ぶ]" の解  $q^0$  を求める。ただし解とは,  $q^0 \in C^1[0, a]$ ,  $\min q^0 < q^* < \max q^0$  であり  $q^0(x) = q^*$  なる真  $x^*$  と除き  $C^2$  で (1.7) と境界条件を満たすものをいう。一次元の場合 任意の  $q^* \in I$  に対して, 基本的に求積法によって解  $q^0 = q^0(x; q^*)$  を求めることが出来る。(  $h(q^0), q^0$  ) は, (1.4)~(1.6) の解の才の近似というべきもので, 下図8の様は振舞をする。



2)  $\varphi, \omega$  を小さく任意実数として,

$$\begin{cases} d^2 g^- / dx^2 + Q(h^-(g^-), g^-) = 0 & x \in \Omega_\varphi^-(0, x^* + \varphi) \\ dg^- / dx = 0 \text{ at } x=0, & g^-(x^* + \varphi) = g^* + \omega \end{cases}$$

および

$$\begin{cases} d^2 g^+ / dx^2 + Q(h^+(g^+), g^+) = 0 & x \in \Omega_\varphi^+(x^* + \varphi, a) \\ g^+(x^* + \varphi) = g^* + \omega, & dg^+ / dx = 0 \text{ at } x=a \end{cases}$$

の解  $g_0^-, g_0^+$  を  $g^0$  の近くを求める。これは簡単な陰関数定理の応用で可能である ( $\because \frac{d}{dg} Q(h^\pm(g), g) \leq 0$ )。

オ2段  $\varepsilon \ll 1$  ( $\varepsilon \neq 0$ ) の場合.

3)

$$\begin{cases} (1.4) \times (1.5) & \text{in } \Omega_\varphi^- \\ dp/dx = dg/dx = 0 & \text{at } x=0 \\ g(x^* + \varphi) = g^* + \omega, & p(x^* + \varphi) = p^* = \frac{1}{2}(h^+(g^*) + h^-(g^*)) \end{cases}$$

および

$$\begin{cases} (1.4) \times (1.5) & \text{in } \Omega_\varphi^+ \\ g(x^* + \varphi) = g^* + \omega, & p(x^* + \varphi) = p^* \\ dp/dx = dg/dx = 0 & \text{at } x=a \end{cases}$$



の解  $(p_\varepsilon^-, g_\varepsilon^-), (p_\varepsilon^+, g_\varepsilon^+)$  で  $\varepsilon \downarrow 0$  のとき

$$g_\varepsilon^\pm \rightarrow g_0^\pm \quad \overline{\Omega}_\varphi^\pm \text{ で } \text{一様}$$

$$p_\varepsilon^\pm \rightarrow h^\pm(g_0^\pm) \quad x^* \text{ の任意の近傍を除き一様}$$

$$\left( \varepsilon \frac{d}{dx} p_\varepsilon^\pm \right)^2 \Big|_{x=g_0^\pm + \varphi} \rightarrow \int_{p^*}^{h^\pm(g^* + \omega)} P(p, g^* + \omega) dp$$

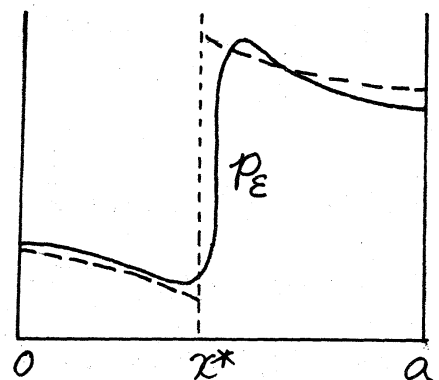
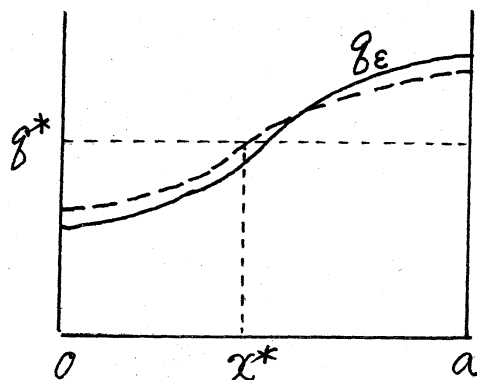
なるものを求める。これは  $(h^\pm(g_0^\pm), g_0^\pm)$  を  $\pm 0$  近似として特異摂動論により可能。

4)

$$\Lambda(\varphi, \omega, \varepsilon) \equiv \left( \varepsilon \frac{d}{dx} p_\varepsilon^+ \right)^2 - \left( \varepsilon \frac{d}{dx} p_\varepsilon^- \right)^2 \Big|_{x=x^* + \varphi}$$

$$\Gamma(\varphi, \omega, \varepsilon) \equiv \frac{dg_\varepsilon^+}{dx} - \frac{dg_\varepsilon^-}{dx} \Big|_{x=x^* + \varphi}$$

とおき,  $\varepsilon \ll 1$  に対して  $\Lambda(\varphi, \omega, \varepsilon) = \Gamma(\varphi, \omega, \varepsilon) = 0$  なる  $\varphi = \varphi(\varepsilon)$ ,  $\omega = \omega(\varepsilon)$  を求める。これが求まれば  $p_\varepsilon = p_\varepsilon^+$  in  $\overline{\Omega}_{\varphi(\varepsilon)}^+$ ,  $= p_\varepsilon^-$  in  $\overline{\Omega}_{\varphi(\varepsilon)}^-$ ,  $g_\varepsilon = g_\varepsilon^+$  in  $\overline{\Omega}_{\varphi(\varepsilon)}^+$ ,  $= g_\varepsilon^-$  in  $\overline{\Omega}_{\varphi(\varepsilon)}^-$  は  $C^1(\overline{\Omega})$  であり (1.4) ~ (1.6) を満たすから実は  $C^2(\Omega)$  であって  $(p_\varepsilon, g_\varepsilon)$  が真の解となる。



$\varphi(\varepsilon), \omega(\varepsilon)$  の求め方: 3) より

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \Lambda(0, \omega, \varepsilon) = \int_{h^-(q^*+\omega)}^{h^+(q^*+\omega)} P(p, q^*+\omega) dp \equiv J(q^*+\omega)$$

また,  $q^0 \in C^1(\bar{\Omega})$  なるから,  $\Gamma(0, 0, 0) = 0$ 。 ~~さらに~~

さらに

$$\begin{bmatrix} \Lambda_\varphi(0, 0, 0) & \Lambda_\omega(0, 0, 0) \\ \Gamma_\varphi(0, 0, 0) & \Gamma_\omega(0, 0, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & J'(q^*) \\ \Gamma_\varphi(0, 0, 0) & \Gamma_\omega(0, 0, 0) \end{bmatrix}$$

いま  $J(q^*) = 0, J'(q^*) \neq 0$  なる  $q^* \in I$  があると仮定

すると,  $\Gamma_\omega(0, 0, 0) \neq 0$  が成立すれば, 上より,

$\Lambda(0, 0, 0) = \Gamma(0, 0, 0) = 0$ ,  $D(\Lambda, \Gamma)/D(\varphi, \omega)$  が nonsingular

となり, 陰関数定理により  $\varphi(\varepsilon), \omega(\varepsilon)$  が得られる。

$\Gamma_\omega(0, 0, 0) \neq 0$  は, 常微分方程式論から  $\Gamma_\omega$  の explicit な表現を用いて示される。

定理 (1次元).  $J(q^*) = 0, J'(q^*) \neq 0$  なる  $q^* \in I$  が

存在するとする。(1.4)~(1.6)の解  $(p_\varepsilon, q_\varepsilon)$  で  $\varepsilon \downarrow 0$  とき

$$p_\varepsilon \rightarrow h_{q^*}(q^0) \quad x^* \text{ の近傍を除き一様}$$

$$q_\varepsilon \rightarrow q^0 \quad [0, a] \text{ で一様}$$

なるものが存在する。なお  $q^0 = q^0(x; q^*)$  は (1.7) with Neumann の解。

さて, 上記の一次元の方法を二次元の場合に拡張するには, どのような困難があるだろうか。

- (A)  $J(g^*)=0$ ,  $J'(g^*) \neq 0$  なる  $g^* \in I$  の存在は,  $P=0$  の S-型曲線とすると, まほと不自然な仮定ではない。またこれは  $Q$  の次元とは無関係なものである。
- (B) 1) の reduced problem の解 <sup>$g^0$</sup> の存在は? (一次元では本積法によ, ていたのて, 2次元への直接的拡張は期待できない。)
- (C) 2) は  $\frac{d}{dg} Q(\tilde{g}^\pm(g), g) \leq 0$  による陰関数定理の応用であり, 2次元への拡張は期待できる (命題 2.1 参照)。
- (D) 3) の  $\varphi_E^\pm, g_E^\pm$  の存在は特異摂動論の応用であるがこれは拡張可能と思われる (詳細は略す)。これに伴い,  $1(0, \varphi, 0) = J(g^* + \varphi)$  も,  $g^* + \varphi$  の近傍での局所論なので, 得られると思われる。
- (E) 4) で  $\Gamma_\varphi(0, 0, 0)^+$  の存在は? (一次元では常微分方程式論を用いて  $\Gamma_\varphi(0, 0, 0)$  を陽に表現できたが, 2次元の場合は, この直接的拡張は期待薄である。)

以上をながめると 2次元への拡張において本質的な問題は (B) と (E) である。これは  $\varepsilon$  には無関係 ( $\varepsilon=0$ ) の問題である。我々は, 次節で (B), (E) をともに含む問題を提起する。それを解くことが本 No. 6 の中心テーマとなる。

1.2. 問題. 我々は次の問題を提唱する。ここで  $Q$ ,  $\nabla$  の記号とその性質は §1.1. に準ずる。

問題1 ある有界領域  $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^2$  と  $q_0 \in C^1(\overline{\Omega_0})$  で次の (1) を満たすものが存在するとする。

1)  $S_0 = \{x \mid q_0(x) = q^*\}$  は  $\Omega_0$  内の滑らかな曲線。

2)  $q_0 \in C^2(\Omega_0 \setminus S_0)$  で

$$(1.8) \quad \Delta q_0 + Q(h(q_0), q_0) = 0 \quad \text{in } \Omega_0 \setminus S_0.$$

$$(1.9) \quad \partial q_0 / \partial N_0 = 0 \quad \text{on } \Sigma_0 = \partial \Omega_0.$$

ここで  $N_0$  は  $\Sigma_0$  の単位外法線ベクトル。なお、このとき  $q_0$  を領域  $\Omega_0$  に対する reduced problem の解と呼ぶことにする。

上の仮定の下で、 $\Omega_0$  の摂動  $\Omega_\psi$  ( $\psi$  は摂動パラメータ) に対し、 $\Omega_\psi$  に対する reduced problem の解は存在するか？

解題1.  $Q$ ,  $\nabla$  が適当なものの、 $\Omega_0$  が円の場合、円対称な  $\Omega_0$  に対する reduced problem の解  $q_0$  が求められることがある（動径成分のみの常微分方程式によるため）。問題1はこのように特殊な場合から、一般の（しかし  $\Omega_0$  の摂動の） $\Omega_\psi$  に対しても reduced problem が解けるかという問題になっている。これは §1.1. の (B) の問題とみることが出来る。

解題2. 問題1 と §1.1. の (E) との関連をみる。そのため

仮定の追加と準備をする。いま  $S_0$  は単一閉曲線とし、 $s$  をその弧長パラメータとする  $S_0 = \{x^0(s)\}$ ,  $S_0$  の外法線ベクトルを  $n^0(s)$  とする。  $S_0$  上の関数  $\varphi$  に対して  $S_\varphi = \{x^0(s) + \varphi(s)n^0(s)\}$  また同様に,  $\Sigma_0 = \{X^0(\sigma)\}$ , ( $\sigma$  は  $\Sigma_0$  の弧長パラメータ)  $\Sigma_0$  上の関数  $\psi$  に対して,  $\Sigma_\psi = \{X^0(\sigma) + \psi(\sigma)N^0(\sigma)\}$  とする。  $S_0$  ( $S_\varphi$ ) の内側を  $\Omega_0^+$  ( $\Omega_\varphi^+$ ) とし  $\Omega_0 \setminus \Omega_0^+$  ( $\Omega_\varphi \setminus \Omega_\varphi^+$ ) を  $\Omega_0^-$  ( $\Omega_{\varphi\psi}^-$ ) とする。 ただし  $\Omega_\psi$  は  $\Sigma_\psi$  の内側領域。  $\Omega_0^\pm$  で  $(g, g)$  の  $Q(h(\cdot))$  かとる枝を  $Q(h^\pm(\cdot))$  とする (符号同順)。 仮に問題1の解  $g$  に対して  $S_\varphi = \{x: g(x) = g^*\}$  とすると、1) ii) の条件は

$$(1.10) \quad \Delta g^+ + Q(h^+(g^+), g^+) = 0 \quad \Omega_\varphi^+$$

$$(1.11) \quad \Delta g^- + Q(h^-(g^-), g^-) = 0 \quad \Omega_{\varphi\psi}^-$$

$$(1.12) \quad g^- = g^+ = g^* \quad \text{on } S_\varphi$$

$$(1.13) \quad \partial g^- / \partial N = 0 \quad \text{on } \Sigma_\psi$$

さらに  $g \in C^1(\Omega_\psi)$  の条件は

$$(1.14) \quad \frac{\partial g^+}{\partial n} - \frac{\partial g^-}{\partial n} = 0 \quad \text{on } S_\varphi$$

ここで  $g^+ = g|_{\Omega_\varphi^+}$ ,  $g^- = g|_{\Omega_{\varphi\psi}^-}$  である。  $\varphi = \psi = 0$  の時は  $g = g_0$  として (1.10) ~ (1.14) が仮定より成立するから、問題1は、与えられた  $\psi$  に対し、(1.10) ~ (1.14) を満す  $g$ ,  $g^+$ ,  $g^-$  を求める問題になっている。 ところで (1.10) with (1.12) 及び (1.11) with (1.12), (1.13) は境界値問題として well defined であるが、実際後に命題2.1で示る様に  $\varphi, \psi$  が与えられれば

それぞれの境界値問題より  $g^+, g^-$  がきまる。したがって  

$$T(\varphi, \psi)(\omega) = (\partial g^+ / \partial n - \partial g^- / \partial n) \cdot \Phi(\omega) \quad (\Phi(\omega) = x^0(\omega) + \varphi(\omega) n^0(\omega))$$
 とおくと  $T(\varphi, \psi) = 0$  とする  $\varphi$  を求める問題ともなり、  
 いる。  $T(\varphi, 0) = 0$  より陰関数定理を適用することと考  
 ると、  $T_\varphi$  (  $T$  の  $\varphi$  に関する Frechet 微分 ) の可逆性が中心  
 課題となる。この意味で問題 1 は、§1.1 の (E) の問題  
 ともみることが出来る。

問題 1 以上の解題 2) にそつて整理して本節を終る。

$g^+ - g^* = u$ ,  $g^- - g^* = u$  とし,  $Q(R^+(u+g^*), u+g^*) = f(u)$   
 $Q(R^-(u+g^*), u+g^*) = F(u)$ ,  $\Phi \equiv X^0(\sigma) + \psi(\sigma) N^0(\sigma)$  と書く  
 他の記号は前述に準ずる。

仮定 (A-1)  $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^2$  は有界領域で  $\Sigma_0 = \partial\Omega_0$  は  $C^\infty$ -級単純閉曲線  
 $S_0$  は  $\Omega_0$  内の  $C^\infty$ -単純閉曲線。

(A-2)  $f, F \in C^\infty(I)$ , ( $I$  は  $0 \in I \subset \mathbb{R}$  の開区間)  
 $f(u) > 0 > F(u)$ ,  $f'(u), F'(u) \leq 0$  ( $u \in I$ )

問題 1' (A-1), (A-2) を仮定する。さらに  $\varphi = \psi = 0$  のとき  
 次の (1.15) ~ (1.19) を満たす,  $u_0 \in C^\infty(\overline{\Omega_0^+})$ ,  $u_0 \in C^\infty(\overline{\Omega_0^-})$  が  
 存在するとする。

$$(1.15) \quad \Delta u + f(u) = 0 \quad \Omega_0^+$$

$$(1.16) \quad \Delta u + F(u) = 0 \quad \Omega_0^-$$

$$(1.17) \quad u \circ \Phi = \mathbb{L} \circ \Phi = 0 \quad \text{on } S_0$$

$$(1.18) \quad \langle N, \nabla \mathbb{L} \circ \Phi \rangle = 0 \quad \text{on } \Sigma_0$$

$$(1.19) \quad \langle n, (\nabla u - \nabla \mathbb{L}) \circ \Phi \rangle = 0 \quad \text{on } S_0$$

与えられた  $\psi$  ( $\Sigma_0$  上の関数) に対して (1.15)~(1.19) を満す  $\varphi$  ( $S_0$  上の関数),  $u$  ( $\overline{\Omega}_\varphi^+$  上の関数),  $\mathbb{L}$  ( $\overline{\Omega}_{\varphi\psi}^-$  上の関数) を求めよ。ここで  $n, N$  は  $S_\varphi, \Sigma_\varphi$  の外向単位法線ベクトル,  $\langle, \rangle$  は  $\mathbb{R}^2$  の内積。

注意 問題1' は, いわゆる「(定常)2相自由境界問題」。

2.1. 結果.  $\alpha$  を非整数とし, 領域  $D$  で  $[\alpha]$  階微分可能  $[\alpha]$  階導関数が指数  $\alpha - [\alpha]$  の Hölder 連続である関数全体を  $H^\alpha(D)$  そのノルムを  $\|\cdot\|_\alpha^D$  又は単に  $\|\cdot\|_\alpha$  と書く。

命題 2.1  $\varepsilon > 0$  と十分小,  $\alpha \geq \varepsilon$ ,  $\varphi \in H^{\alpha+2}(S_0)$ ,  $\psi \in H^{\alpha+2}(\Sigma_0)$  かつ  $\|\varphi\|_{2+\varepsilon}, \|\psi\|_{2+\varepsilon}$  は十分小とする。このとき (1.15) (1.17) の解  $u \in H^{\alpha+2}(\overline{\Omega}_\varphi^+)$  と (1.16), (1.17), (1.18) の解  $\mathbb{L} \in H^{\alpha+2}(\overline{\Omega}_{\varphi\psi}^-)$  がそれぞれ  $u_0, \mathbb{L}_0$  の近くに一意に存在する。さらに,

$$(2.1) \quad \Gamma(\varphi, \psi) \equiv \langle n, (\nabla u - \nabla \mathbb{L}) \circ \Phi \rangle \in H^{\alpha+1}(S_0) \quad \text{で}$$

$$(2.2) \quad \|\Gamma(\varphi, \psi)\|_{\alpha+1} \leq C (\|\varphi\|_{\alpha+2} + \|\psi\|_{\alpha+2})$$

を満す, (2.2) を含め今後  $C$  は  $\varphi, \psi$  に無関係で, 有界な  $\alpha$  に対し有界な定数を表す。

この命題の証明は、ある変数変換により、 $\Omega_0^+(\Omega_0^-)$ に引きもどし (1.15)~(1.18) とその上の方程式 ( $\Delta$  は、 $\varphi, \psi$  に依存する係数の Laplace-Bertrami operator とする) とみて遂行される。  $\|\varphi\|_{2+\varepsilon}, \|\psi\|_{2+\varepsilon}$  が小であり、仮定より、 $u-u_0$   $U-U_0$  の満たす方程式の線形部分作用素は  $\Delta + f'(u_0)$  ( $\Delta + F'(U_0)$ ) である。これらの可逆性に注意し、 $H^{2+\varepsilon}(\Omega_0^+), (H^{2+\varepsilon}(\Omega_0^-))$  の基底座標で、縮小写像の定理を用い、 $u-u_0, (U-U_0)$  を求め、さらに正則性を  $H^{q+2}$  まで上げ、 $\|u-u_0\|_{q+2} \leq C \|\varphi\|_{q+2}, \|U-U_0\|_{q+2} \leq C(\|\varphi\|_{q+2} + \|\psi\|_{q+2})$  を求め、(2.2) を得る。

この命題より §1.2 の解題 2) で述べた様に  $\Gamma(\varphi, \psi) = 0$  なる  $\varphi$  を求める問題に、問題 1') は帰着される。

### 定理 (Main)    おしこ Diffraction 問題

$$(2.3) \quad \Delta v + f'(u_0)v = 0 \quad \text{in } \Omega_0^+$$

$$(2.4) \quad \Delta V + F'(U_0)V = 0 \quad \text{in } \Omega_0^-$$

$$(2.5) \quad v - \alpha^0 \langle n^0, \nabla v - \nabla V \rangle = 0 \quad \text{on } S_0$$

$$(2.6) \quad v = V \quad \text{on } S_0$$

$$(2.7) \quad \langle N^0, \nabla V \rangle = 0 \quad \text{on } \Sigma_0$$

の解が  $v \equiv 0, V \equiv 0$  にかぎるならば、問題 1') は次の意味でとける。ただし  $\alpha^0 = \langle n^0, \nu_0 \rangle / (F(0) - f(0))$ 。

$\varepsilon > 0$  を任意に十分小として固定する。  $\eta > 0$  は任意とする。



このとき, 近傍  $D_\eta = \{ \|\psi\|_{5+\varepsilon+\eta}^{\Sigma_0} < C_\eta \}$  と写像  $\pi_\eta: D_\eta \rightarrow H^{4+\varepsilon}(S)$  が存在して,

$$T(\pi_\eta(\psi), \psi) = 0$$

$$\|\pi_\eta(\psi)\|_{4+\varepsilon} \leq KC_\eta^{-1} \|\psi\|_{5+\varepsilon+\eta}$$

さらに  $\psi \in C^\infty(\Sigma_0) \cap D_\eta$  ならば  $\pi_\eta(\psi) \in C^\infty(S)$ .

証明の方針について; 陰関数定理を適用する。ただし  $T_\varphi$  の可逆性は, 命題 2.3, で見るように,  $T_\varphi$  の approximate inverse  $L$  に関する情報であり, かつ “derivative loss” ( $L$  が  $T$  の像空間から, 原像の空間への有界作用素ではなく, より regularity の悪い, 空間への有界作用素になっている) を伴うので, classical な陰関数定理ではなく, Nash-Moser 型の陰関数定理 (Zehnder [7]) を用いる。主要なチェクポイントは,

i) Smoothing operator の存在 (これは Hölder class と呼ばれている。)

ii)  $T(0,0) = 0$  (これは仮定より  $0, K$ )

iii)  $T_\varphi, T_{\varphi\varphi}$  の存在

iv) approximate inverse  $L$  の存在と  $\|T_\varphi L \varphi - \varphi\| \leq C \|T\|' \|\varphi\|'$  ここで “右辺のノルム  $\|\cdot\|'$  は左辺の  $\|\cdot\|$  に較べ, derivative loss 分だけ高いクラスのノルム。

$$v) \quad \|\Gamma(\varphi, \psi)\| \leq C(\|\varphi\| + \|\psi\|)^\delta \quad 1 \leq \delta < 2$$

(これは命題 2.1 により  $\delta = 1$  で示される).

適用の詳細は省略する。本 Note では iii) については本節で結果のみを述べ、iv) については次節で簡単に示される。

$\varepsilon > 0$  を十分小として、 $V_\varepsilon^{a+2} \equiv \{(\varphi, \psi) \in H^{a+2}(S_0) \times H^{a+2}(\Sigma); \|\varphi\|_{2+\varepsilon} + \|\psi\|_{2+\varepsilon} < \varepsilon\}$  とする。iii) に関して次の命題が成立する。

命題 2.2  $(\varphi, \psi) \in V_\varepsilon^{a+2}$  とする、 $\Gamma: V_\varepsilon^{a+2} \rightarrow H^{a+1}(S_0)$

は、 $\varphi$  に関して 2 回微分可能であり、導関数を  $\Gamma_\varphi, \Gamma_{\varphi\varphi}$  と書くと、

$$\|\Gamma_\varphi(\varphi, \psi)X\|_{a+1} \leq C\{\|X\|_{a+2} + (\|\varphi\|_{a+2} + \|\psi\|_{a+2})\|X\|_{2+\varepsilon}\}$$

$$\begin{aligned} \|\Gamma_{\varphi\varphi}(\varphi, \psi)[X, Y]\|_{a+1} \leq C\{ & \|X\|_{a+2}\|Y\|_{2+\varepsilon} + \|X\|_{2+\varepsilon}\|Y\|_{a+2} \\ & + (\|\varphi\|_{a+2} + \|\psi\|_{a+2})\|X\|_{2+\varepsilon}\|Y\|_{2+\varepsilon}\} \end{aligned}$$

for  $\forall X, Y \in H^{a+2}(S_0), (\varphi, \psi) \in V_\varepsilon^{a+2}$ .

この命題も  $u, v$  を  $\Omega_0^+, \Omega_0^-$  に引きもどした関数とみて  $\varphi$  の微分可能性を定義に基づいて調べ、導関数の評価をたんに  $\Omega_0^+$  に調べることによって得られる。

2.2. approximate inverse of  $\Gamma_\varphi$ 

次に (iv) に關しては次の命題が成立する。

命題 2.3. Main 定理の仮定が成立するとする。

$(\varphi, \psi) \in V_S^{a+4}$ ,  $\|\varphi\|_{a+2} + \|\psi\|_{a+2}$  は有界とする。  $H^{a+2} \rightarrow H^{a+2}$  の有界作用素  $L(\varphi, \psi)$  が存在して、

$$\|L(\varphi, \psi)Z\|_{a+2} \leq C \{ \|Z\|_{a+2} + (\|\varphi\|_{a+4} + \|\psi\|_{a+4}) \|Z\|_0 \}$$

$$\| \Gamma_\varphi(\varphi, \psi) L(\varphi, \psi) Z - Z \|_{a+1}$$

$$\leq C \{ \|\Gamma\|_{a+2} \|Z\|_0 + \|\Gamma\|_0 \|Z\|_{a+2} + (\|\varphi\|_{a+4} + \|\psi\|_{a+4}) \|\Gamma\|_0 \|Z\|_0 \}$$

for  $\forall Z \in H^{a+2}(S_0)$ . また右辺の  $\Gamma = \Gamma(\varphi, \psi)$ .

証明の方針 (L のまめ方): 詳しい証明には立入らないが, L がどのように定義されるか, Diffraction 問題の一貫性とどんな関係にあるかを簡単にみてみよう。そのために,  $\Gamma_\varphi$  を形式的に表現することから始めよう。  $\varphi$  の変分  $X$  に対する,  $\Gamma$  等の第 1 変分を  ${}^X\Gamma (= \Gamma_\varphi X)$  等と書くことにする。(2.1) より

$$\begin{aligned} {}^X\Gamma(\varphi, \psi) &= \langle {}^Xn, (\nabla u - \nabla U) \cdot \Phi \rangle \\ &\quad + \langle n, (\nabla {}^X u + \nabla {}^X U) \cdot \Phi \rangle \\ &\quad + \langle n, [D^2(u - U) \cdot \Phi] n_0 \rangle X \end{aligned}$$

ここで  $D^2u$  は  $u$  の Hessian。  $\langle {}^Xn, n \rangle = 0$ ,  $\nabla u, \nabla U \parallel n$  より 右辺第 1 項は消去される。また簡単な計算より、

$$\langle n, [D^2(u-u) \circ \Phi] n \rangle = F(0) - f(0) - \rho \Gamma(\varphi, \psi) \equiv G$$

ここで  $\rho$  は  $S_\varphi$  の曲率であり,  $F(0) - f(0) < 0$  であるから,  $\Gamma(\varphi, \psi)$  が十分小のとき  $G < 0$ .  $x$  を  $S_\varphi$  の接ベクトルとすると,

$$(2.8) \quad \begin{aligned} {}^x\Gamma(\varphi, \psi) &= \langle n, (\nabla^x u - \nabla^x u) \circ \Phi \rangle + \langle n, n_0 \rangle Gx \\ &\quad + \langle n_0, x \rangle \left( \frac{d}{ds} \Gamma(\varphi, \psi) \right) x \end{aligned}$$

また  ${}^x u, {}^x u$  は (1.15) ~ (1.18) より,

$$(2.9) \quad \Delta^x u + f'(u) {}^x u = 0 \quad \text{in } \Omega_\varphi^+$$

$$(2.10) \quad \Delta^x u + F'(u) {}^x u = 0 \quad \text{in } \Omega_{\varphi\psi}^-$$

$$(2.11) \quad {}^x u \circ \Phi = -\langle n^0, \nabla u \circ \Phi \rangle x \quad \text{on } S_0$$

$$(2.12) \quad {}^x u \circ \Phi = -\langle n^0, \nabla u \circ \Phi \rangle x \quad \text{on } S_0$$

$$(2.13) \quad \langle N, \nabla^x u \circ \Phi \rangle = 0 \quad \text{on } \Sigma_0$$

以上の形式的計算は  $\Gamma_\varphi(\varphi, \psi)$  を  $H^{q+2} \rightarrow H^{q+2}$  と見るとき  $(\varphi, \psi) \in H^{q+4}(S_0) \times H^{q+4}(\Sigma_0)$  の場合に正当化可能である (証明は略)。

$\Gamma_\varphi$  の導関数を考えることは, 与えられた  $S_0$  上の関数  $x$  に対して  $\Sigma = \Gamma^x(\varphi, \psi)$  となる  $x$  を求めることであるが, ここでは直接それは考えないで以下のようにする。

$\hat{u}, \hat{u}$  と (もし存在するならば)

$$(2.8)' \quad \Sigma = \langle n, (\nabla \hat{u} - \nabla \hat{u}) \circ \Phi \rangle + \langle n, n_0 \rangle Gx$$

と (2.9) (2.10) (2.11) (2.13) の  ${}^x u$  を  $\hat{u}$  と,  ${}^x u$  を  $\hat{u}$  と代えた式, さらに (2.12')  $\hat{u} \circ \Phi = \hat{u} \circ \Phi$  を満すものとする。

(2.8)' と (2.11) から  $X$  を消去して

$$(2.11)' \quad \hat{u} \circ \Phi - \alpha \langle n, (\nabla \hat{u} - \nabla \hat{U}) \circ \Phi \rangle = -\alpha Z$$

ここで  $\alpha = \langle n^0, \nabla u \circ \Phi \rangle / \langle n, n_0 \rangle \Gamma > 0$  for  $\varphi, \psi$  小.

したがって  $\hat{u}, \hat{U}$  の満たすべき式は

$$(2.9)' \quad \Delta \hat{u} + f'(u) \hat{u} = 0 \quad \text{in } \Omega_\varphi^+$$

$$(2.10)' \quad \Delta \hat{U} + F'(\bar{U}) \hat{U} = 0 \quad \text{in } \Omega_{\varphi\psi}^-$$

$$(2.11)' \quad \hat{u} \circ \Phi - \alpha \langle n, (\nabla \hat{u} - \nabla \hat{U}) \circ \Phi \rangle = -\alpha Z \quad \text{on } S_0.$$

$$(2.12)' \quad \hat{U} \circ \Phi = \hat{u} \circ \Phi \quad \text{on } S_0.$$

$$(2.13)' \quad \langle N, \nabla \hat{U} \circ \Phi \rangle = 0 \quad \text{on } \Sigma_0.$$

与えられた  $\varphi, \psi$  に対し, この Diffraction 問題の可解性は, 解の一意的性に帰着され (Ladyzhenskaya & Ural'tseva [8]) さらに  $\|\varphi\|_{2+\varepsilon} + \|\psi\|_{2+\varepsilon}$  が小のときは  $\varphi = \psi = 0$  の場合の一意的性に帰着されることが示される (詳細は略). Main 定理の仮定の下では  $\hat{u}, \hat{U}$  が求められる. (2.8)' より  $LZ$ .

$$LZ = Z/\alpha - \langle n, (\nabla \hat{u} - \nabla \hat{U}) \circ \Phi \rangle / \alpha$$

によって定義する. これを評価することによって 命題 2.3 の第 1 の評価を得る (証明は割愛).

また (2.8) ~ (2.13) と (2.8)' ~ (2.13)' (EK' L(2.11) は原形  $\hat{u} \circ \Phi = -\langle n_0, \nabla u \circ \Phi \rangle$ ) と比較して.

$$\Gamma_\varphi LZ - Z = \langle n, \nabla W \circ \Phi \rangle + \langle n_0, t \rangle \left( \frac{d}{dt} \Gamma(\varphi, \psi) \right) L(\varphi, \psi) Z$$

ただし  $W = \chi_U - \hat{U}$  ( $\chi = L\chi$ ) であり, これは

$$\begin{cases} \Delta W + F(U)W = 0 & \text{on } \Omega_{\varphi\varphi}^+ \\ \langle N, \nabla W \cdot \Phi \rangle = 0 & \text{on } \Sigma_0 \\ W \cdot \Phi = -\langle n^0, (\nabla U - \nabla V) \cdot \Phi \rangle, L\chi \text{ on } S_0. \end{cases}$$

の解である。したがって,  $\Gamma_\varphi L\chi - \chi$  が  $\Gamma$ ,  $\Sigma$  に對し 2 次 (各 1 次) であることは直ちにわかる。これを評価して命題 2.3 のオ 2 の評価式をうる (証明は略)。

### 3.1 Diffraction problem の一意性.

Main 定理中の Diffraction problem の一意性のための一つの十分条件を,  $\Omega_0$  が円,  $u_0, \chi_0$  が円対称な場合に結果のみ述べておこう。

#### 定理 3.1

$$(3.1) \quad \frac{4+M}{3} \frac{l^+}{l+l^+} < \frac{1}{4} \quad \text{かつ} \quad \frac{1+M}{3} l^+ \frac{F(0)}{\left. \frac{\partial u_0}{\partial n_0} \right|_{|x|=l^+}} < \frac{1}{2}$$

のとき, Diffraction problem (2.3) ~ (2.7) は  $v \equiv 0, V \equiv 0$  のみを解とする。ここで  $l$  ( $l^+$ ) は  $\Omega_0$  ( $\Omega_0^+$ ) の半径,  $M = l \max \{ -F'(\chi_0(x)) : x \in \Omega_0^- \}$ 。

### 3.2. 例.

最後に 簡単な例をのべる。  $p, q$  で記述する。

$$P(p, q) = (q - k)(p^2 - 1), \quad Q(p, q) = a(p - b)$$

ここで  $k, a, b$  は定数.  $q^* = 0$  とするとき.

$$\begin{cases} 0 = P(p, q) & \text{in } \Omega = \{|x| < L\} \\ 0 = \Delta q + Q(p, q) & \text{in } \Omega \\ 0 = \partial q / \partial N & \text{on } \Sigma = \{|x| = L\} \end{cases}$$

は  $|b| < 1$  かつ

$$k > a(1 - b^2)L^2(1 + \frac{4}{1-b})\log\sqrt{\frac{2}{1+b}}$$

ならば  $q$  は 中心部で正, 周辺部で負の円対称な解をもつ

ただし  $P(p, q) = 0$  の枝は  $h^+(q) = 1$   $q > 0$ ,  $h^-(q) = -1$   $q < 0$  である。

$$-1 < b < -\frac{145}{169}$$

のとき (3.1) を満たす。

## References

- [1] Mimura, M., Asymptotic behavior of a parabolic system  
relat ed to a platonic prey and predator model,  
SIAM J. Appl. Math. 1977.
- [2] Segel, L. & Jackson, Dissipative stracture: An explanation  
and an ecological example, J. Theor. Biol. 37  
545-559 (1972).
- [3] Segel, L. & Levin, S, Application of nonlinear stability  
theory to the study of the effects of diffusion  
on predator prey interaction, In AIP Conf.  
Proc. 27,123-152 (1976).
- [4]Mimura, M.,Nishiura, Y. & Yamaguchi, M., Some diffusive  
prey and predator systems and their bifurcation  
problems, Annals of New York Academy of Sciences  
316, 490-510 (1979).
- [5] Fife, P., Boundary and interior transition layer phenomena  
for pairs of second-order differential equations,  
J. Math. Anal. Appl. 54 497-521 (1976).
- [6] Mimura, M., Tabata, M. & Hosono, Y., Singular perturbation  
for pairs of two point boundary value problems  
of Neumann type, Lecture Note in Num. Appl. 2,  
79-132 (1980). Kinokuniya
- [7] Zehnder, E., Generalized implicit function theorems with  
applications to some small divisor problem I,  
Comm. Pure Appl. Math. 28, 91-140 (1975).
- [8] Ladyzehnskaya, O. A. & Ural'tseva, N. N., Linear & qasilinear  
elliptic equations, Academic press, New York 1968